

# 最短秘匿経路問題の計算複雑性

水流 大輔<sup>1</sup>    土中 哲秀<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 九州大学

## 1 はじめに

グラフ最適化問題は実問題の数理モデルとして幅広く用いられており、最短経路問題などの経路探索問題はその実用性の高さから多くの研究が行われている [1, 3, 4].

van Bevern ら [4] は、近傍制約を持つ経路探索問題として、点秘匿経路問題を提案した.

**定義 1** (点秘匿経路問題). 無向単純グラフ  $G = (V, E)$  と, 2つの異なる頂点  $s, t \in V$ , 2つの整数  $k \geq 2, l \geq 0$  を入力とする. このとき,  $G$  に  $|V(P)| \leq k$  かつ  $|N(V(P))| \leq l$  を満たすような  $s$ - $t$  パス  $P$  が存在するかを判定する問題を, 点秘匿経路問題という.

点秘匿経路問題は,  $l = 0$  とすると,  $s$ - $t$  ハミルトンパス問題となるため NP 困難である. これに対して, van Bevern らは, 点秘匿経路問題のパラメータ化計算量を研究した. 彼らは, 木幅に関して固定パラメータ容易であること, フィードバック辺集合数に関して多項式サイズカーネルが存在すること, 頂点被覆数に関する多項式サイズカーネルが存在しないことなどを示した [4]. Luckow と Fluschnik [3] は, 解サイズ  $k$  と近傍サイズ  $l$  に関するパラメータ化複雑性を解析した. 具体的には, 点秘匿経路問題は解サイズ  $k$  に関して W[1] 困難である一方,  $k + l$  に関して, 固定パラメータ容易であることを示した.

本研究では, 点秘匿経路問題の亜種である重み付き最短秘匿経路問題を提案し, その計算複雑性について考察する. 重み付き最短秘匿経路問題を以下のように定義する.

**定義 2** (重み付き最短秘匿経路問題). 非負整数辺重み付き無向グラフ  $G = (V, E)$  と, 2つの異なる頂点  $s, t \in V$  を入力とする. このとき,  $G$  に存在する最短  $s$ - $t$  パス  $P$  の中で,  $|N(V(P))|$  が最小となるような  $P$  を求める問題を, 最短秘匿経路問題という. ただし,  $V(P)$  はパス  $P$  の頂点集合で,  $N(V(P))$  はパス  $P$  の開近傍である.

点秘匿経路問題と最短秘匿経路問題の違いは, 点秘匿経路問題は必ずしも最短でない  $s$ - $t$  パスが解となる一方, 最短秘匿経路問題は必ず解は最短  $s$ - $t$  パスでなければならない. 本研究では, まず重みなしグラフにおいて, 最短秘匿経路問題が多項式時間で解けることを示す. これは, 点秘匿経路問題が重みなしグラフにおいても NP 困難であることと対照的である.

**定理 1.** 重みなし最短秘匿経路問題は多項式時間で解ける.

一方, 重み付きグラフにおいては, 最短秘匿経路問題は最短  $s$ - $t$  パスの長さに関して W[1] 困難であることを示す.

**定理 2.** 重み付き最短秘匿経路問題は最短  $s$ - $t$  パスの長さをパラメータとしたとき  $W[1]$  困難である。

最後に、重み付き最短秘匿経路問題は最短  $s$ - $t$  パスの長さに関して  $XP$  であることを示す。

**定理 3.** 重み付き最短秘匿経路問題は最短  $s$ - $t$  パスの長さをパラメータとしたとき  $n^{O(k)}$  で解ける。

以下では、定理 2 と定理 3 を証明する。

## 2 定理 2 の証明

本節では定理 2 を証明する。まず、定理 2 の帰着に用いるマルチカラードクリーク問題を定義する。

**定義 3** (マルチカラードクリーク問題).  $k$  個に分割された独立点集合  $V_1, V_2, \dots, V_k$  からなる  $n$  頂点のグラフ  $G = (V, E)$  を入力とする。このとき、 $G$  に大きさ  $k$  のクリークが存在するか判定する問題を、マルチカラードクリーク問題という。

マルチカラードクリーク問題は  $r$ -正則グラフにおいても  $k$  に関して  $W[1]$  困難であることが知られている [2]。

以下では、マルチカラードクリーク問題から重み付き最短秘匿経路問題への  $k$  に関するパラメータ化帰着を示す。

$r$ -正則グラフ  $G = (V, E)$  をマルチカラードクリークのインスタンスとする。ただし、 $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$  である。このとき重み付き最短秘匿経路問題の等価なインスタンス  $(G', s, t)$  を構築する、

$G' = (V', E')$  に関して、以下のように構成されている。 $V'$  は頂点集合  $V$ 、頂点  $s, t$ 、各辺  $e \in E$  に対応する頂点  $v_e$ 、 $h \in \{1, \dots, k-1\}$  に対する頂点  $w_h$  で構成されている頂点集合である。すなわち、 $V' = V_1 \cup \dots \cup V_k \cup \{s, t\} \cup V_E \cup W$  である。また、このとき

$$V_E := \{v_e \in V' \mid e \in E\}$$

$$W := \{w_h \in V' \mid 1 \leq h \leq k-1\}$$

とおく。また、 $E'$  は以下のように構成されている。 $s \in V'$  は  $V_1$  内の全ての頂点と隣接しており、 $t \in V'$  は  $V_k$  内の全ての頂点と隣接している。各  $w_h \in W$  に関して  $w_h$  は  $V_h$  内の全ての頂点と  $V_{h+1}$  内の全ての頂点に対し隣接している。各  $v_e \in V_E$  に関して  $G$  において  $e = \{x, y\}$  のとき、 $G'$  において  $v_e$  は  $x, y$  と隣接している。また、 $V_E$  と  $V' \setminus V_E$  の間にある全ての辺の重みを  $k+1$  とし、その他の辺の重みは全て 1 とする。

$G'$  の構成は明らかに多項式時間で可能である。マルチカラードクリーク問題から重み付き最短秘匿経路問題の帰着は図 1 のようになる。

**補題 1.**  $G$  に大きさ  $k$  のクリークが存在する必要十分条件は、 $G'$  に  $|N(V(P))| \leq rk - \binom{k}{2} + n - k$  を満たす長さ  $2k$  の最短  $s$ - $t$  パス  $P$  が存在することである。

**証明.**  $(\Rightarrow)$   $C = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  を  $G$  の大きさ  $k$  のクリークとする。ただし、 $v_i \in V_i$  である。このとき、 $s$ - $t$  パス  $P$  を  $s, v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, w_{k-1}, v_k, t$  と定義する。 $G'[V' \setminus V_E]$  の辺重みは全て 1 なので、パス  $P$  の長さは  $2k$  である。 $s$ - $t$  パスが  $V_E$  の頂点を経由すると、長さが少なくとも  $2k+2$  となるため、最短  $s$ - $t$  パスは  $G'[V' \setminus V_E]$  に存在する。また、 $G'$  の構成方法より、 $G'[V' \setminus V_E]$  において、任意の  $s$ - $t$  パスは全ての  $w_i$  を通り、かつ  $V_i$  の頂点をちょうど一つ通るので、最短パスの長さは  $2k$  である。よって、 $P$  は最短  $s$ - $t$  パスである。

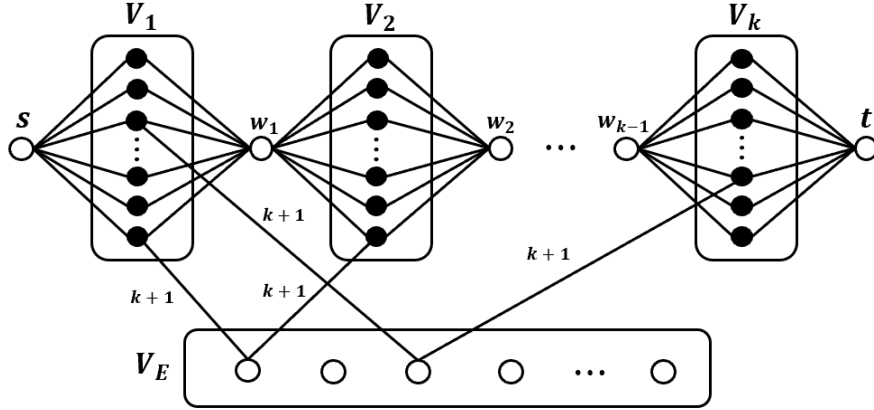


図 1: マルチカロードクリーク問題から重み付き最短秘匿経路問題への帰着.

最後に,  $|N(V(P))| \leq rk - \binom{k}{2} + n - k$  を満たすことを示す. まず,  $P$  は  $V \setminus V(P)$  の頂点を近傍にもつ.  $|V(P) \cap V| = k$  より,  $n - k$  個の  $V$  に属する頂点を近傍にもつ. また,  $G$  は  $r$ -正則グラフであることから,  $G'$  の構成方法より,  $G'$  において  $V$  内の任意の頂点は  $V_E$  に属する  $r$  個の頂点を近傍に含んでいる.  $G$  において  $C$  はクリークであることから, 各  $1 \leq i < j \leq k$  に対して, 任意のペア  $v_i, v_j \in C$  は辺  $\{v_i, v_j\}$  をもつ. したがって,  $G'$  において,  $v_i$  と  $v_j$  は共通の隣接点  $v_{\{v_i, v_j\}} \in V_E$  を持つ. したがって,  $P$  は  $V_E$  と  $rk - \binom{k}{2}$  個の隣接点しか持たない. ゆえに,  $|N(V(P))| = rk - \binom{k}{2} + n - k$  となる.

( $\Leftarrow$ )  $G'$  において  $|N(V(P))| \leq rk - \binom{k}{2} + n - k$  を満たす長さ  $2k$  の最短  $s$ - $t$  パス  $P$  が存在すると仮定する. もし,  $P$  が  $V_E$  の頂点を含むとすると,  $P$  の長さは少なくとも  $2k + 2 > 2k$  となる, よって,  $P$  は  $V_E$  のどの頂点も通らない.  $G'[V \setminus V_E]$  において, 任意の  $s$ - $t$  パスは全ての  $w_i$  を通り, かつ  $V_i$  の頂点をちょうど一つ通るので,  $P$  は全ての  $w_i$  を通り, かつ  $V_i$  の頂点をちょうど一つ通る. よって,  $G'$  の構成方法から,  $V \setminus V(P)$  の頂点は  $P$  の近傍となる. したがって,  $|N(V(P)) \setminus V_E| = n - k$  となる. また,  $G$  は  $r$ -正則グラフであることから, 任意の  $v \in V$  は  $r$  個の隣接点を  $V_E$  に持つ. 今,  $|N(V(P))| \leq rk - \binom{k}{2} + n - k$  であることと  $|N(V(P)) \setminus V_E| = n - k$  であることから,  $V(P)$  の頂点は  $V_E$  の隣接点を  $\binom{k}{2}$  個共有しなければならない.  $V(P) \cap V = k$  より, 各ペア  $v_i \in V_i$  と  $v_j \in V_j$  は  $V_E$  の隣接点  $v_{\{v_i, v_j\}}$  を共有する. すなわち,  $G$  において  $\{v_i, v_j\} \in E$  である. 任意のペア  $v_i, v_j$  について  $\{v_i, v_j\} \in E$  であるので,  $V(P) \cap V$  は  $G$  において大きさ  $k$  のクリークである.  $\square$

補題 1 より, 定理 2 は示された.

### 3 定理 3 の証明

本節では, 定理 3 を示す.

**定理 3 の証明.** 入力グラフ  $G = (V, E)$  が与えられたとき, はじめに最短  $s$ - $t$  パスの長さを計算する. これはダイクストラ法により多項式時間で計算できる [1]. 辺重みは非負整数なので, 最短  $s$ - $t$  パスの長さを  $k$  とすると, 任意の最短  $s$ - $t$  パスの辺の本数は  $k$  以下となる. したがって, 全ての最短  $s$ - $t$  パスを  $n^{O(k)}$  時間で列挙することができる. 各最短  $s$ - $t$  パスの近傍は多項式時間で計算できることから, 重み付き最短秘匿経路問題は  $n^{O(k)}$  時間で計算することができる.  $\square$

## 参考文献

- [1] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numer. Math.*, 1(1):269–271, dec 1959. doi:10.1007/BF01386390.
- [2] Michael R. Fellows, Danny Hermelin, Frances A. Rosamond, and Stéphane Vialette. On the parameterized complexity of multiple-interval graph problems. *Theor. Comput. Sci.*, 410(1):53–61, 2009. URL: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2008.09.065>, doi:10.1016/J.TCS.2008.09.065.
- [3] Max-Jonathan Luckow and Till Fluschnik. On the computational complexity of length- and neighborhood-constrained path problems. *Inf. Process. Lett.*, 156:105913, 2020. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2019.105913>, doi:10.1016/J.IPL.2019.105913.
- [4] René van Bevern, Till Fluschnik, and Oxana Yu. Tsidulko. Parameterized algorithms and data reduction for the short secluded s-t-path problem. *Networks*, 75(1):34–63, 2020. URL: <https://doi.org/10.1002/net.21904>, doi:10.1002/NET.21904.