

再着色可能BFUWモデルにおける 単一エージェントによる帰還付き探索

高橋 翔多 首藤 裕一

法政大学

概要

本研究では、単一の忘却エージェントを使用してグラフの頂点間を自律的に移動させ、全ての頂点を訪問した後に開始頂点でエージェントを停止させる探索問題に取り組む。忘却エージェントとは、移動するたびにそれまでに得た情報を全て失うエージェントのことを指す。エージェントは、現在位置の頂点に色を塗る能力と、現在位置の頂点と隣接する頂点の色を見ることができる。本研究では、既に色が塗られている頂点に対して新しい色を塗る再着色が許可されている場合において、探索問題を解決するために必要な色の数を探求する。具体的には、再着色を許可した場合において、各頂点の次数が高々3、5であるような任意のグラフの探索がそれぞれ4色、6色で十分であることを示す。

1 はじめに

単一のモバイルエージェントが、単純無向連結グラフ上を自律的に移動する探索問題について考える。探索の種類としては、エージェントが未知の無向グラフの全ての頂点を探索し、最後に開始頂点に戻り、終了する必要がある**帰還付き探索問題**を考える。また、グラフは頂点や辺に一意なラベルが存在しない匿名グラフである。

本研究では、Böckenhauer ら [BFUW23] のモデルと同じモデルを扱う。本稿では、このモデルを著者らの頭文字を取ってBFUWモデルと呼ぶ。まず、BFUWモデルについて説明する。頂点や辺に一意なラベルが存在しない無向グラフを想定し、エージェントは永続的なメモリを持たず、どの頂点から現在いる頂点に訪れたかを認識することはできない。エージェントは、現在いる頂点に任意の自然数を用いて着色することが可能であり、現在の頂点の色と、隣接する頂点の色の多重集合を見ることができる。実行開始時にはすべての頂点は未着色である。便宜上、未着色の頂点は色0を持つものとみなす。エージェントは、現在位置の頂点の色と、隣接する頂点の色の多重集合の情報に基づいて、現在の頂点を着色する色と、移動先の頂点の色を決定する。エージェントが決定した移動先の頂点の色を持つ隣接頂点が複数ある場合、どの頂点に移動するかはエージェント自信は判断することができず、敵対者が決定する。有限回のステップの後、グラフの全ての頂点が訪問され、エージェントが開始頂点に位置し、エージェントが停止を選択したとき、**アルゴリズム**は全てのグラフを正常に探索したこととなる。Böckenhauer ら [BFUW23] は、このモデルを、すでに着色済みの頂点の色を変更できる**再着色可能モデル**とそれを許さない**再着色不可能モデル**に細分化し、探索問題を解くために必要な色数を探求した。

表 1: 単一の忘却エージェントによるグラフ探索に関する研究。

	再着色可能	再着色不可能
任意	~ 7 [BFUW23]	$n - 1$ [BFUW23]
外周が高々 k のグラフ	-	$\min\{2k - 3, n - 1\} \sim \min\{2k - 1, n - 1\}$ [BFUW23]
木	-	3 [BFUW23]
スクエアパス	-	4 [BFUW23]
2 部グラフ	-	$n - 2 \sim n - 1$ [BFUW23]
サイズが n のグラフ	-	$n - 3 \sim n - 2$ [BFUW23]
最大次数が 3 以下であるグラフ	~ 4 定理 1	
最大次数が 5 以下であるグラフ	~ 6 定理 2	-

今回のモデルであるモバイルエージェントによる探索問題は、多くの研究がなされている問題であるが、BFUW モデルは、標準的なモバイルエージェントのモデルとは多くの相違点がある。標準的なモバイルエージェントのモデルの多くは、エージェントがどの頂点から訪れたかを認識することができるが、BFUW モデルは認識できない。また、標準的なモバイルエージェントのモデルの多くは、エージェントのメモリは任意であり情報を保持することが可能であるが、BFUW モデルは忘却エージェントであり、情報を記録することができない。

しかしながら、標準モデルにおいても Böckenhauer ら [BFUW23] のモデルと類似する研究がある。Bojko ら [BGKP22]、Aleliunas ら [AKL⁺79]、Yanovski ら [YWB03] のグラフ探索アルゴリズムは、前滞在頂点の認識を必要としない。Cohen ら [CFI⁺08] は、全てのグラフを探索するために必要なラベルの数を分析した。Cohen ら [CFI⁺08] は、一定のメモリを持つロボットが、わずか 3 つのラベルで全てのグラフを探索できることを証明した。さらに、任意の $d > 4$ に対して、最大 $\lfloor \log d \rfloor - 2$ 個のラベルを使用する忘却ロボットは、最大次数 d の任意のグラフを探索出来ないことを示した。Disser ら [DHK19] のモデルでは、エージェントによって探索中にラベルが割り当てられることがある。Disser ら [DHK19] は、任意のエージェントが対数以下のメモリを持つ場合に、 n 個の頂点を持つ任意のグラフを探索するためには $\Theta(\log \log n)$ 個のラベルが必要十分であることを明らかにした。

本研究では、Böckenhauer ら [BFUW23] が明らかにしていない未解決な領域に対して必要十分な色数を探求する。具体的には、再着色を許可した場合における次数制限グラフ上の帰還付き探索、すなわち、最大次数 $k = 1, 2, \dots, n - 1$ の連結グラフ上の帰還付き探索に必要な色数を明らかにすることを目的とする。以降では、再着色可能モデルにおいて次数制限グラフに対してこれまでに得られた結果および本研究が明らかにした結果について説明する。 $k \leq 1$ のとき、考慮すべき連結グラフは 2 頂点を繋いだグラフしか存在しない。このグラフの探索には 1 色が必要かつ十分であることはほぼ自明である。 $k \leq 2$ のとき、考慮すべきグラフはパスあるいはリングとなる。これらのグラフの探索には 3 色で十分であることが容易に示せる。 $k \leq n - 1$ のとき、すなわち任意の連結グラフの探索は、Böckenhauer ら [BFUW23] が 7 色で十分であることを示した。本研究では、 $k = 3, 5$ のときに任意のグラフの探索がそれぞれ 4 色、6 色で十分であることを示す。

2 諸定義

グラフは、頂点や辺に一意なラベルが存在しない、無向連結グラフを考える。また、エージェントは永続的なメモリを持たず、現在いる頂点にどの頂点から訪れたかを認識することができないが、現在いる頂点に色を塗ることと、現在の頂点の色と、隣接する頂点の色の集合を見ることができる。この研究では、既に色の塗られた頂点を別の色で塗り替えることが許可されている。エージェントは、現在の頂点と隣接する頂点の色に基づいて、現在の頂点を着色する色と、移動先の色を決定する。本モデルにおいて**アルゴリズム**とは、特定の**色構造**を持つ頂点にエージェントが位置するときにエージェントがどのような行動を起こすのかを決定する関数である。ここでいう色構造とは、ひとつの色 $c_0 \in \mathbb{N}$ および色の多重集合 $E: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ の組 (c_0, E) である。ただし、本稿全体を通して自然数全体の集合 \mathbb{N} は 0 を含むものとする。頂点 v の色が c_0 であり、各色 $c \in \mathbb{N}$ を持つような v の隣接頂点がちょうど $E(c)$ 個存在するとき、 v は色構造 (c_0, E) を持つという。すべての色構造の集合を**環境**と呼び、 \mathcal{E} と表記する。前述した本モデルにおけるアルゴリズムは、以下の $move$ 関数である。

$$move: \mathcal{E} \rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{STOP\}$$

$move((c_0, E)) = (c_1, d)$ であることは、 $move$ 関数の実行においてエージェントが色構造 (c_0, E) を持つ頂点 v に移動したときに次の動作で v の色を c_1 に変更し、色 d を持つ隣接頂点に移動することを意味する。ただし、任意の $c_0 \geq 0$ について $move(c_0, E) = (c_1, d)$ のときは必ず $E(d) > 0$ でなければならない。これは存在しない隣接頂点にエージェントを送ることができないという制約である。

与えられたグラフに対して、アルゴリズムを実行する。初期状態では、すべての頂点は色 0 であり、色がついていない。まず、エージェントは敵対者が選択した頂点 v_0 に配置される。近傍の色構造は、発生する色ごとに隣接する頂点の数を数えることで \mathcal{E} の要素 (c_0, f) に変換される。 $move(c_0, f)$ によって得られた結果が、 $STOP$ の場合、アルゴリズムの実行は停止する。 (c_1, d) の場合、頂点 v_0 は色 c_1 で着色され、敵対者が選択した頂点 v_0 に隣接する色 d の頂点に、エージェントは次のステップのために移動する。有限回のステップの後、グラフのすべての頂点が訪問され、エージェントが開始頂点 v_0 に位置し、 $move$ 関数が $STOP$ を返したとき、アルゴリズムは全てのグラフを正常に探索したこととなる。

3 主定理

諸事情により、本稿では得られた主定理を述べるにとどめ、具体的なアルゴリズムの戦略や構成はワークショップ当日の発表で紹介する。

定理 1. 最大次数が 3 以下の任意のグラフを探索するために十分な色の数は 4 色である。

定理 2. 最大次数が 5 以下の任意のグラフを探索するために十分な色の数は 6 色である。

参考文献

[AKL⁺79] Romas Aleliunas, Richard M Karp, Richard J Lipton, László Lovász, and Charles Rackoff. Random walks, universal traversal sequences, and the complexity of maze problems. In *20th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 1979)*, pages 218–223. IEEE Computer Society, 1979.

- [BFUW23] Hans-Joachim Böckenhauer, Fabian Frei, Walter Unger, and David Wehner. Zero-memory graph exploration with unknown inports. In *International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, pages 246–261. Springer, 2023.
- [BGKP22] Dominik Bojko, Karol Gotfryd, Dariusz R. Kowalski, and Dominik Pająk. Tree Exploration in Dual-Memory Model. In *47th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2022)*, pages 22:1–22:16, 2022.
- [CFI⁺08] Reuven Cohen, Pierre Fraigniaud, David Ilcinkas, Amos Korman, and David Peleg. Label-guided graph exploration by a finite automaton. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 4(4):1–18, 2008.
- [DHK19] Yann Disser, Jan Hackfeld, and Max Klimm. Tight bounds for undirected graph exploration with pebbles and multiple agents. *Journal of the ACM (JACM)*, 66(6):1–41, 2019.
- [YWB03] Vladimir Yanovski, Israel A Wagner, and Alfred M Bruckstein. A distributed ant algorithm for efficiently patrolling a network. *Algorithmica*, 37(3):165–186, 2003.