個体群プロトコルモデルにおける有向リング上の時間最適な自己安定リーダ選挙[*]

横田 大輔　　首藤 裕一　　増澤 利光

大阪大学 大学院情報科学研究科

概 要

本論文では，個体群プロトコルモデルにおける有向リング上の自己安定リーダ選挙プロトコルを提案する．個体群のサイズ n の上限 N が与えられたとき，提案プロトコルは任意の状況から開始して $O(nN)$ 期待ステップでただひとつのリーダを選出する．与えられた上界 N が厳密である場合，すなわち，$N = O(N)$ である場合，この収束時間は最適である．提案プロトコルは，初期状況におけるリーダの不在を検出するために $O(N)$ 状態を使用する．

1　はじめに

本稿では，**個体群プロトコル**モデル (以下，個体群モデル) [2] を考える．**個体群**と呼ばれるネットワークは，**個体**と呼ばれる多数の有限状態機械から構成されている．各個体は，互いの状態を更新するために**交流**を行う．交流に参加する個体のペアを指定することはできず，個体のペアは一様ランダムに選ばれる．個体群は単純有向グラフ $G = (V, E)$ で表す．V は個体群を構成する個体の集合であり，E はどの個体のペアが交流を行うことができるかを示している．個体の各ペア $(u, v) \in E$ は，無限に頻繁に交流を行うが，個体の各ペア $(u', v') \notin E$ は，一度も交流が行われない．各ステップにおいて，E 中のすべてのペアから一様ランダムに選ばれた 1 つペアが交流を行う．この仮定により，個体群プロトコルの時間計算量を評価することが可能となる．[1] 個体群プロトコルの分野では，多くの研究が完全グラフ，つまり個体のすべてのペアが無限に頻繁に交流する個体群のためのプロトコルを考案することに費やされてきた．また，いくつかの研究 [1, 2, 4, 7, 8, 10, 14, 15, 17, 19, 20] では，完全グラフではない個体群を考えている．

自己安定 [11] とは，どのような一時故障 (メモリ改竄など) が発生しても，ネットワークが自律的に故障から回復できる耐故障性のことである．自己安定の概念は次のように定義される．

---

[*] 本稿のフルペーパー（未出版原稿）は [23] に掲載．

[1] 個体群プロトコルの時間計算量を評価するとき，個体群モデルのほとんどすべての研究はこの仮定を用いている

1. **収束性**：任意の初期状況から実行を開始しても，システムはやがて安全状況と呼ばれる状況に到達する．

2. **閉包性**：一度システムが安全状況に到達すると，それ以降，システムは永遠に所望の性質を満たし続ける．

自己安定プロトコルは有限個の一時故障を許容するため，個体群モデルにおいて非常に重要であり，これは安価で信頼性の低い多数の計算機で構成されるネットワークにおいて必要な特性である．その結果，多くの研究が自己安定プロトコルに費やされてきた [1, 4, 6, 7, 8, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]．

リーダ選挙は個体群モデルにおける最も基本的な問題の一つであるため，自己安定個体群プロトコルに関する上記の研究の多くにでは自己安定リーダ選挙（SS-LE）に焦点を当てている.[2] リーダ選挙問題の目標は，個体群の中でただひとつの個体をリーダとして選出することである．残念ながら，SS-LE は，完全グラフだけに着目しても，追加の仮定なしには解くことができない [1, 6, 22]．この不可能性を克服するための研究は，文献上では大別して 4 つのカテゴリーに分類されている．(中には複数のカテゴリに属する研究もある．)

最初のカテゴリ [5, 6, 22] は，すべての個体が個体数の正確な値を知っていると仮定する場合である．この仮定を用いて，Cai ら [6] は完全グラフでの SS-LE プロトコルを，Burman ら [5] は同じ設定でより高速なプロトコルを，首藤ら [22] は任意グラフに対する SS-LE プロトコルを提案した．

2 つ目のカテゴリ [4, 7, 12] は，故障検出器の一種である**オラクル**を用いたものである．Fischer と Jiang[12] は，少なくとも 1 つのリーダが存在するかどうかを最終的にすべての個体に伝えるオラクル Ω? を導入した．彼らは，Ω? を用いた 2 つの SS-LE プロトコルを提案した．1 つは完全グラフについて，もう 1 つはリングについてのプロトコルである．Canepa ら [7] は，Ω? を用いた 2 つの SS-LE プロトコルを提案した．それらは，木についての決定性プロトコルと任意のグラフについての確率的プロトコルである．Beauquier ら [4] は，Ω? の 2 つのコピーを使用する任意のグラフについての決定性 SS-LE プロトコルを発表した．

3 つ目のカテゴリ [13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21] は，自己安定の要件をやや緩和した，**緩安定**リーダ選挙プロトコルである．具体的には，このカテゴリの研究では，個体群が非常に長い時間にわたって仕様（ただひとつのリーダが存在する）を満足させた後に，問題の仕様から逸脱することを許容している．この概念は [18] で紹介された．[13, 16, 18, 21] で与えられたプロトコルは完全グラフで動作し，[15, 17, 19, 20] で与えられたプロトコルは任意のグラフで動作する．最近，首藤ら [16] は，完全グラフについての時間最適な緩安定リーダ選挙プロトコルを提案した．パラメータ $\tau \geq 1$ が与えられた場合，プロトコルの実行は，任意の状況から $O(\tau n \log n)$ 期待ステップ以内に安全状況に到達し，それ以降，$\Omega(n^{\tau})$ 期待ステップの間，ただひとつのリーダを保持し続ける．ただし，n は個体数を表す．

[2]いくつかの重要なプロトコル [1, 2, 3] は，事前に選択されたただひとつのリーダを必要とする．特に，Angluin ら [3] は，ただひとつのリーダが存在するならば，すべての準線形述語が非常に速く解けることを示している．

表 1: 有向リング上の自己安定リーダ選挙

	前提条件	収束時間	状態数
[1]	n は整数 k の倍数ではない	$\Theta(n^3)$	$O(1)$
[12]	オラクル $\Omega?$	$\Theta(n^3)$	$O(1)$
[8]	なし	指数時間	$O(1)$
本研究	上界 N について $n \le N$	$O(nN)$	$O(N)$

4 つ目のカテゴリ [1, 8, 9, 12] では，SS-LE の不可能性を避けるためにグラフのトポロジを制限する．グラフのクラス $\mathcal{G}$ について，どのグラフ $G \in \mathcal{G}$ も，クラス $\mathcal{G}$ に含まれる 2 つの互いに素な部分グラフを持たないとき，クラス $\mathcal{G}$ は**単純**であるという．Angluin ら [1] は，非単純クラスの任意のグラフについて動作する SS-LE プロトコルが存在しないことを証明した．したがって，単純グラフのクラスに焦点を当てると，そのクラスのすべてのグラフについての SS-LE プロトコルが存在するかもしれない．一般的に，**リング**のクラスは単純である．Angluin ら [1] は，個体群のサイズが与えられた整数 k の倍数ではないすべてのリング（特に奇数サイズのリング）で動作する SS-LE プロトコルを提案した．彼らは，一般的なリング（任意の大きさのリング）に対しては，SS-LE が解けるかどうかという問題を提起したが，Fischer と Jiang[12] は，一般的なリングに対しては，オラクル $\Omega?$ を用いて SS-LE を解いている．この問題は，最近になって，Chen と Chen[8] が一般的なリングについての SS-LE プロトコルを発表するまで，10 年間研究されていた．[1, 8, 12] で与えられたこれら 3 つのプロトコルでは，各個体は定数状態のみを使用する．[1, 12] で提案されたプロトコルの期待収束時間 (任意の状況からただひとつのリーダを選択するのに必要なステップ数) は $\Theta(n^3)$ であるのに対し，[8] で提案されたプロトコルは指数関数的に長い収束時間を必要とする． 3 つのプロトコルはすべて，リングが方向付けされているか，または，**有向**であることを前提としている．しかし，この仮定は必須ではない。なぜなら，Angluin ら [1] は方向付けされたリングについての自己安定プロトコルを発表しており，リング中のすべての個体に共通の方向を与えているからである．この論文でも，有向リングについて考える．最近，Chen と Chen[9] がリングについての研究を正則グラフについてのものに一般化した．

2 研究成果

本稿は，4 番目のカテゴリに分類される．有向リングに対する最初の時間最適 SS-LE プロトコル P_{RL} を与える．具体的には，個体数 n の上界 N が既知であるとき，任意の有向グラフについて P_{RL} は $O(nN)$ 期待ステップでただひとつのリーダを選出する．$o(n^2)$ 期待ステップで SS-LE を解くことができるプロトコルは存在しない．したがって，P_{RL} は，与えられた個体数の上界 N が漸近的に厳密であれば（$i.e.$, $N = O(n)$），時間的に最適である．結果は表 1 にまとめられている．

[2] オラクル $\Omega?$ は，個体群中にリーダが存在するかどうかを，最終的に各個体に伝達することを保証するだけである．ここで，オラクルが直ちに各個体にリーダの不在を伝達すると仮定すると，[12] のプロトコルの収束時間は，$\Theta(n^3)$ で制限される。

この論文の主な成果は，個体群中に複数のリーダが存在する場合に，$O(n^2)$ 期待ステップ以内にリーダの数を 1 つに減少させる新しいメカニズムを考案したことである．基本的に，リングについての既存の 3 つの SS-LE プロトコル [1, 8, 12] は，同じメカニズムに基づいてリーダを削除するが，これはただひとつのリーダを選出するために $\Omega(n^3)$ 期待ステップを必要とする．我々のメカニズムは $O(1)$ 状態を必要とする．(プロトコル P_{RL} は，リーダの不在を検出するためだけに $O(N)$ 状態を要求する．) したがって，$O(n^2)$ 期待ステップ内でリーダの不在を各リーダに報告するオラクルを仮定すると，提案されたリーダ削減のメカニズムを用いて，$O(n^2)$ 期待収束時間かつ定数状態で動作する SS-LE プロトコルを即座に得ることができる．我々は，このオラクルが $o(N)$ 状態で実装できるかどうかという興味深い疑問を残している．

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 19H04085 および 20H04140 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] D. Angluin, J. Aspnes, M. J Fischer, and H. Jiang. Self-stabilizing population protocols. *ACM Transactions on Autonomous and Adaptive Systems*, 3(4):1–28, 2008.

[2] Dana Angluin, James Aspnes, Zoë Diamadi, Michael J. Fischer, and René Peralta. Computation in networks of passively mobile finite-state sensors. *Distributed Computing*, 18(4):235–253, 2006.

[3] Dana Angluin, James Aspnes, and David Eisenstat. Fast computation by population protocols with a leader. *Distributed Computing*, 21(3):183–199, 2008.

[4] J. Beauquier, P. Blanchard, and J. Burman. Self-stabilizing leader election in population protocols over arbitrary communication graphs. In *International Conference on Principles of Distributed Systems*, pages 38–52, 2013.

[5] Janna Burman, David Doty, Thomas Nowak, Eric E Severson, and Chuan Xu. Efficient self-stabilizing leader election in population protocols. *arXiv preprint arXiv:1907.06068*, 2019.

[6] S. Cai, T. Izumi, and K. Wada. How to prove impossibility under global fairness: On space complexity of self-stabilizing leader election on a population protocol model. *Theory of Computing Systems*, 50(3):433–445, 2012.

[7] D. Canepa and M. G. Potop-Butucaru. Stabilizing leader election in population protocols. *http://hal.inria.fr/inria-00166632*, 2007.

[8] Hsueh-Ping Chen and Ho-Lin Chen. Self-stabilizing leader election. In *Proceedings of the 38th ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, pages 53–59, 2019.

[9] Hsueh-Ping Chen and Ho-Lin Chen. Self-stabilizing leader election in regular graphs. In *Proceedings of the 39th Symposium on Principles of Distributed Computing*, pages 210–217, 2020.

[10] Gennaro Cordasco and Luisa Gargano. Space-optimal proportion consensus with population protocols. In *International Symposium on Stabilization, Safety, and Security of Distributed Systems*, pages 384–398, 2017.

[11] E.W. Dijkstra. Self-stabilizing systems in spite of distributed control. *Communications of the ACM*, 17(11):643–644, 1974.

[12] M. J. Fischer and H. Jiang. Self-stabilizing leader election in networks of finite-state anonymous agents. In *International Conference on Principles of Distributed Systems*, pages 395–409, 2006.

[13] T. Izumi. On space and time complexity of loosely-stabilizing leader election. In *International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, pages 299–312, 2015.

[14] George B Mertzios, Sotiris E Nikoletseas, Christoforos L Raptopoulos, and Paul G Spirakis. Determining majority in networks with local interactions and very small local memory. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 871–882, 2014.

[15] Y. Sudo, F. Ooshita, H. Kakugawa, and T. Masuzawa. Loosely-stabilizing leader election on arbitrary graphs in population protocols. In *International Conference on Principles of Distributed Systems*, pages 339–354, 2014.

[16] Yuichi Sudo, Ryota Eguchi, Taisuke Izumi, and Toshimitsu Masuzawa. Time-optimal loosely-stabilizing leader election in population protocols. *arXiv preprint arXiv:2005.09944*, 2020.

[17] Yuichi Sudo, Toshimitsu Masuzawa, Ajoy K Datta, and Lawrence L Larmore. The same speed timer in population protocols. In *the 36th IEEE International Conference on Distributed Computing Systems*, pages 252–261, 2016.

[18] Yuichi Sudo, Junya Nakamura, Yukiko Yamauchi, Fukuhito Ooshita, Hirotsugu. Kakugawa, and Toshimitsu Masuzawa. Loosely-stabilizing leader election in a population protocol model. *Theoretical Computer Science*, 444:100–112, 2012.

[19] Yuichi Sudo, Fukuhito Ooshita, Hirotsugu Kakugawa, and Toshimitsu Masuzawa. Loosely stabilizing leader election on arbitrary graphs in population protocols with-

out identifiers or random numbers. *IEICE Transactions on Information and Systems*, 103(3):489–499, 2020.

[20] Yuichi Sudo, Fukuhito Ooshita, Hirotsugu Kakugawa, Toshimitsu Masuzawa, Ajoy K Datta, and Lawrence L Larmore. Loosely-stabilizing leader election for arbitrary graphs in population protocol model. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 30(6):1359–1373, 2018.

[21] Yuichi Sudo, Fukuhito Ooshita, Hirotsugu Kakugawa, Toshimitsu Masuzawa, Ajoy K Datta, and Lawrence L Larmore. Loosely-stabilizing leader election with polylogarithmic convergence time. *Theoretical Computer Science*, 806:617–631, 2020.

[22] Yuichi Sudo, Masahiro Shibata, Junya Nakamura, Yonghwan Kim, and Toshimitsu Masuzawa. The power of global knowledge on self-stabilizing population protocols. In *International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, pages 237–254, 2020.

[23] Daisuke Yokota, Yuichi Sudo, and Toshimitsu Masuzawa. Time-optimal self-stabilizing leader election on rings in population protocols. *arXiv preprint arXiv:2009.10926*, 2020.